DĚLITELNOST - SOUHRNNÉ OPAKOVÁNÍ

1

Pro číslo 13 platí, že $13:2=6$ (zb 1), $13:3=4$ (zb 1) a $13:4=3$ (zb 1). Ve všech případech je zbytek 1.

a) Najděte jiné číslo, které dá zbytek 1, když jej vydělíme kterýmkoli z čísel $2,3,4$.

b) Najděte další tři taková čísla.

V úlohách o dělitelnosti slovem „číslo“ rozumíme číslo přirozené.

Označení: $\mathbb{N}_0 = 0,1,2,3,\ldots$ je množina všech přirozených čísel ($\mathbb{N}$ pochází z latinského „naturalis“, tj. „přirozené“).

Připomenutí: Při dělení se zbytkem platí, že $14:4=3$ (zb 2).

Pomocí písmen to zapíšeme $m:n=p(zb\quad q), 0 \le q < n$.

V úlohách o dělitelnosti slovem „číslo“ rozumíme číslo přirozené.

Označení: $\mathbb{N}_0 = 0,1,2,3,\ldots$ je množina všech přirozených čísel ($\mathbb{N}$ pochází z latinského „naturalis“, tj. „přirozené“).

Připomenutí: Při dělení se zbytkem platí, že $14:4=3$ (zb 2).

Pomocí písmen to zapíšeme $m:n=p(zb\quad q), 0 \le q < n$.

2

a) Číslo 110 je dělitelné čísly 1 a 110. Najděte všech dalších 6 jeho dělitelů.

b) Číslo 1001 je dělitelné čísly 1 a 1001. Najděte všech dalších 6 jeho dělitelů.

3

Najděte trojmístná čísla ABA a BAB, jejichž rozdíl je dělitelný osmi.

Ciferný součet čísla $n \in \mathbb{N}_0$ je součet všech jeho cifer. Budeme jej označovat $CS(n)$. Například $CS(105) = 1 + 0 + 5 = 6$ nebo $CS(290) = 2 + 9 + 0 = 11$.

4

Zjistěte, kolik dvoumístných čísel n vyhovuje následující podmínce.

a) $CS(n) = 2$

b) $CS(n) = 3$

c) $CS(n) = 4$

d) $CS(n) = 5$

e) $CS(n) = 10$

f) $CS(n) = 16$

g) $CS(n) = 18$

h) $CS(n) = 19$

5

V čísle 5201 prohoďte dvě číslice tak, aby nové číslo bylo dělitelné číslem:

a) 2

b) 5

b) 10

Stejnou úlohu řešte pro čísla $473, 101, 2153, 4071, 90777, 62497$ a 505043.

6

Najděte aspoň tři dvoumístná čísla n dělitelná třemi, pro něž je:

a) $CS(n) = 4$

b) $CS(n) = 5$

c) $CS(n) = 6$

7

Číslo 516 i číslo $CS(516) = 5 + 1 + 6 = 12$ jsou dělitelná číslem 4.

a) Najděte takové číslo m, které je dělitelné 4, ale číslo $CS(m)$ není dělitelné 4.

b) Najděte takové číslo n, které není dělitelné 4, ale číslo $CS(n)$ je dělitelné 4.

8

Číslo 517 i číslo $CS(517) = 5 + 1 + 7 = 13$ dají při dělení číslem 3 zbytek 1. Najděte dvě další taková čísla.

Číslem budeme v této kapitole rozumět vždy přirozené číslo.

Číslo m, které lze psát jako součin $m = a \cdot b$, $a > 1$, $b > 1$, nazýváme **číslo složené**.

Číslo, které není složené a je větší než 1, nazýváme prvočíslo.

9

Která z čísel $n < 50$ lze napsat jako součin

a) dvou prvočísel
b) tří prvočísel
c) čtyř prvočísel

10

Najděte všechny dělitele každého z čísel 15, 16, 20 a 21. Mají některé z těchto čísel společného dělitele většího než 1?

Jsou dána přirozená čísla m a n. Číslo p, které dělí jak číslo m, tak číslo n (tj. $p \mid m$ i $p \mid n$), nazveme **společný dělitel** čísel m a n. **Největší společný délite** čísel m a n budeme označovat NSD(m, n).

11

Najděte:

a) NSD(9 , 6)

b) NSD(8 , 9)

c) NSD(9 , 45)

d) NSD(17 , 17)

e) NSD(33 , 22)

f) NSD(80 , 48)

g) NSD(91 , 42)

h) NSD(91 , 49)

i) NSD(98 , 56)

j) NSD(105 , 42)

k) NSD(187 , 99)

l) NSD(1001 , 336).

12

Najděte všechna čísla n, pro která je $20 < n < 30$ a navíc:

a) $NSD(n,6) = 1$

b) $NSD(n,12) = 1$

c) $NSD(n,18) = 1$

d) $NSD(n,14) = 1$

e) $NSD(n,30) = 1$

f) $NSD(n,966) = 1$

Číslo q nazveme **společný násobek** čísel m a n, právě když $m \mid q$ i $n \mid q$.

Nejmenší společný násobek čísel m a n budeme označovat nsn(m, n).

13

Najděte:

a) $nsn(2,4)$

b) $nsn(3,6)$

c) $nsn(9,6)$

d) $nsn(18,12)$

e) $nsn(4,5)$

f) $nsn(40,50)$

g) $nsn(9,45)$

h) $nsn(17,17)$

i) $nsn(12,20)$

j) $nsn(15,20)$

k) $nsn(22,33)$

l) $nsn(14,21)$

m) $nsn(40,48)$

n) $nsn(80,48)$

o) $nsn(91,49)$

p) $nsn(91,42)$

q) $nsn(98,42)$

r) $nsn(198,99)$

s) $nsn(187,99)$

t) $nsn(1001,224)$.

14

Najděte všechna čísla n, pro která je:

a) $nsn(n,6) = 6$

b) $nsn(n,6) = 12$

c) $nsn(n,9) = 18$

d) $nsn(n,21) = 42$

e) $nsn(n,21) = 63$

f) $nsn(n,2) = 42$

g) $nsn(n,7) = 98$

h) $nsn(n,41) = 123$

15

Čísla 216 a 612 jsou *navzájem zrcadlová*.
Obě jsou dělitelná číslem 9.
Najděte trojmístná navzájem zrcadlová čísla, z nichž jedno je, a druhé není dělitelné číslem 9.

16

Ze tří různých číslic A, B, C jsou vytvořena dvě čísla: $X = A + B + C$ a $Y = AB + BC + CA$.

Zjistěte, zda je pravdivé tvrzení:

a) $7 \mid X \Rightarrow 7 \mid Y$ **c)** $11 \mid X \Rightarrow 11 \mid Y$

b) $7 \mid Y \Rightarrow 7 \mid X$ **d)** $11 \mid Y \Rightarrow 11 \mid X$

17

Zjistěte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá pro libovolné dvouciferné číslo.
(T 1) Když ciferný součet nějakého čísla je 9, pak je to číslo dělitelné 9.

(T 2) Když je číslo dělitelné 9, pak jeho ciferný součet je 9.

18

Dokažte, že pro každé

a) dvouciferné číslo,

b) trojciferné číslo,

c) čtyřciferné číslo

platí:

- když je číslo dělitelné 9, pak i jeho ciferný součet je dělitelný 9;
- když je ciferný součet nějakého čísla dělitelný 9, pak i toto číslo je dělitelné 9.

Matematici obě poslední tvrzení formulují stručně: Číslo je dělitelné 9 tehdy a jen tehdy, když jeho ciferný součet je dělitelný 9. Nebo dokonce pomocí značek: $9 \mid n \iff 9 \mid \mathrm{CS}(n)$. Znak $\iff$ se nazývá ekvivalence. jsme zavedli znak $\implies$. Jsou-li U a V výroky, pak i $U \implies V$ je výrok, který čteme z U vyplývá V. Podobně $U \impliedby V$ čteme z V vyplývá U. Spojením obou znaků vzniká znak $\iff$. Výrok $U \iff V$ znamená, že U platí tehdy a jen tehdy, když platí V.